

Elektryczność i Magnetyzm

Wykład: Piotr Kossacki

Pokazy: Kacper Oreszczuk, Aleksander Rodek,
Paweł Trautman

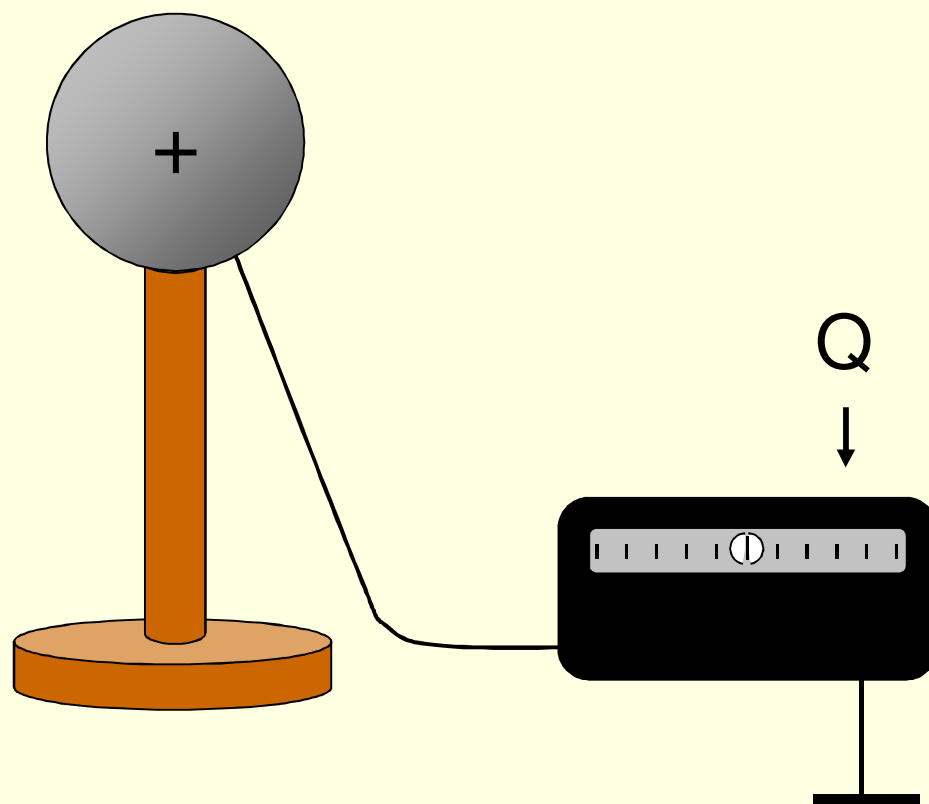
27 II 2020

Wykład drugi

Z poprzedniego wykładu

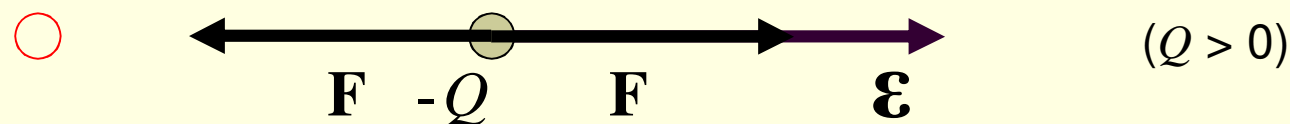
- Siły elektrostatyczne, ładunek [C], prawo Coulomba,
- Elektryzowanie bezpośrednie i przez indukcję
- Szereg tryboelektryczny
- Przewodniki i izolatory
- Rzędy wielkości: 10^{-3} N, 10^{-8} - 10^{-7} C
przenikalność dielektryczna próżni
 $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$
- Równowaga ładunkowa - eksplozja kulombowska

Pomiar ładunku



Kalibracja: 15 nC/podz

Pole elektryczne (oddziaływanie kontaktowe)



$$\mathbf{F} = Q \boldsymbol{\varepsilon}$$

Natężenie pola elektrycznego $\boldsymbol{\varepsilon}$ [N/C]

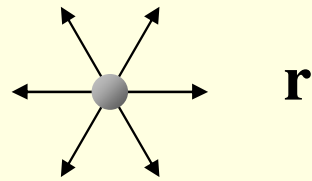
- Pole elektryczne pośredniczy między oddziałującymi ładunkami
- Ładunek jako źródło i jako detektor pola

Dwa sposoby opisu oddziaływań elektrostatycznych

- Oddziaływanie na odległość: prawo Coulomba
 - Wada: tworzy pytanie, jak oddziaływanie „przedostaje się” między ciałami
 - Zaleta: nie mnoży bytów
- Oddziaływanie lokalne: pole elektryczne
 - Zaleta: widoczny pośrednik
 - Wada: dodatkowe pojęcie

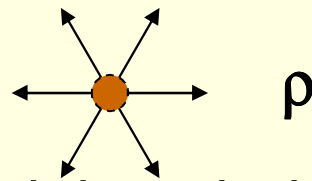
Pole elektryczne: różne źródła

ładunek punktowy Q



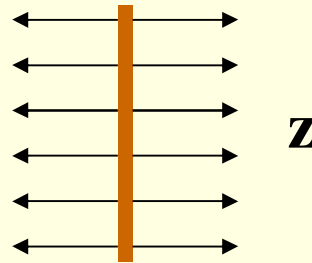
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

jednorodnie naładowana prosta



$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{\rho} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}$$

jednorodnie naładowana płaszczyzna

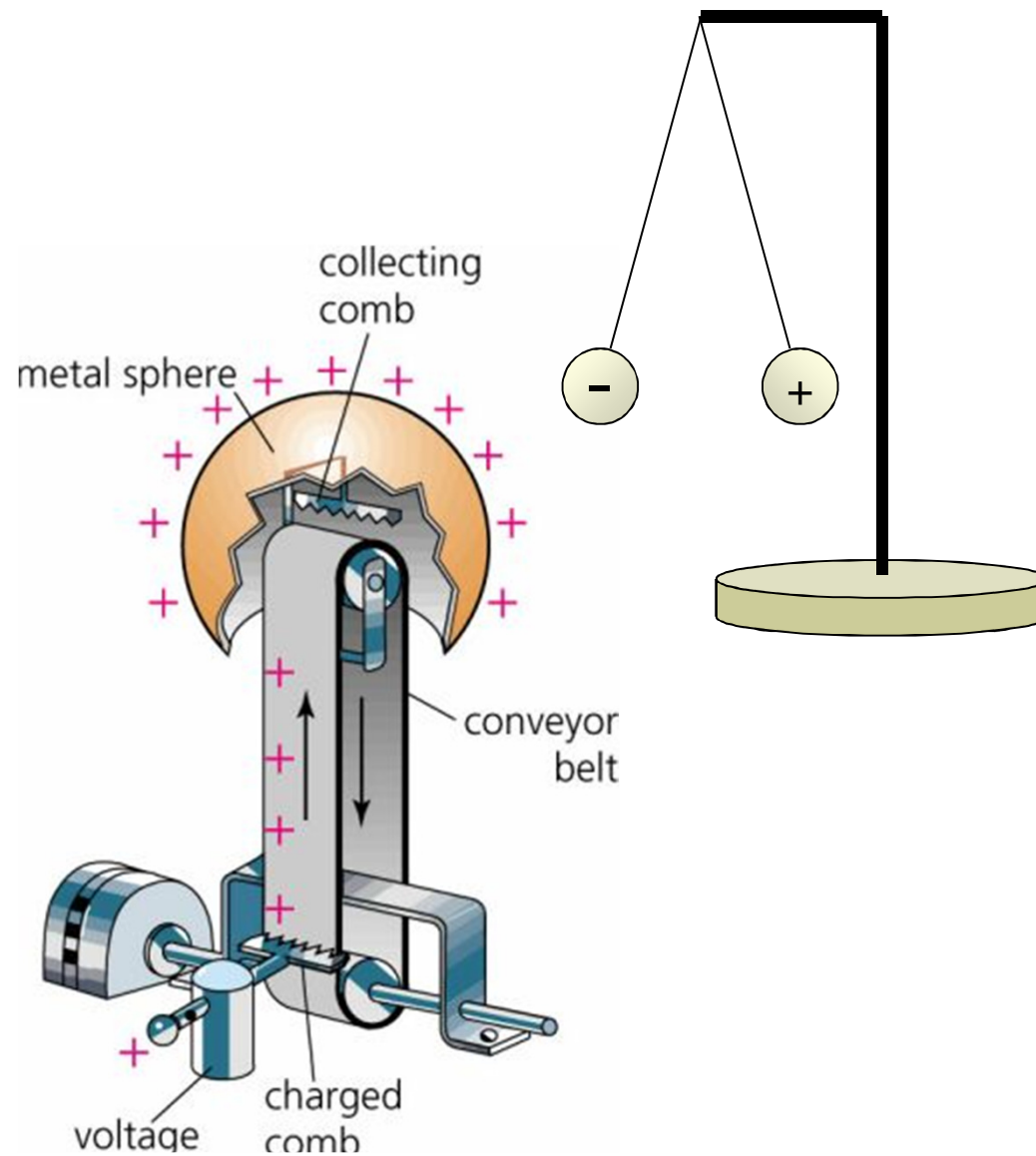


$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$$

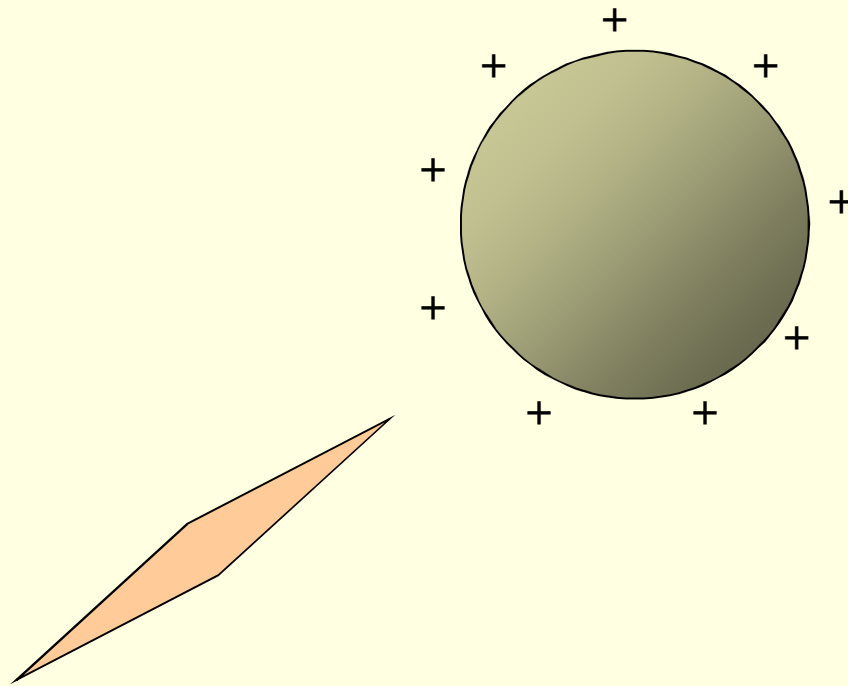
Rzędy wielkości

- $F = 10^{-3} \text{ N}$
- $Q = 10^{-8} \text{ C}$
- $\mathcal{E} = F/Q = 10^5 \text{ N/C}$
 $\text{N/C} = \text{V/m}$

Pole elektryczne

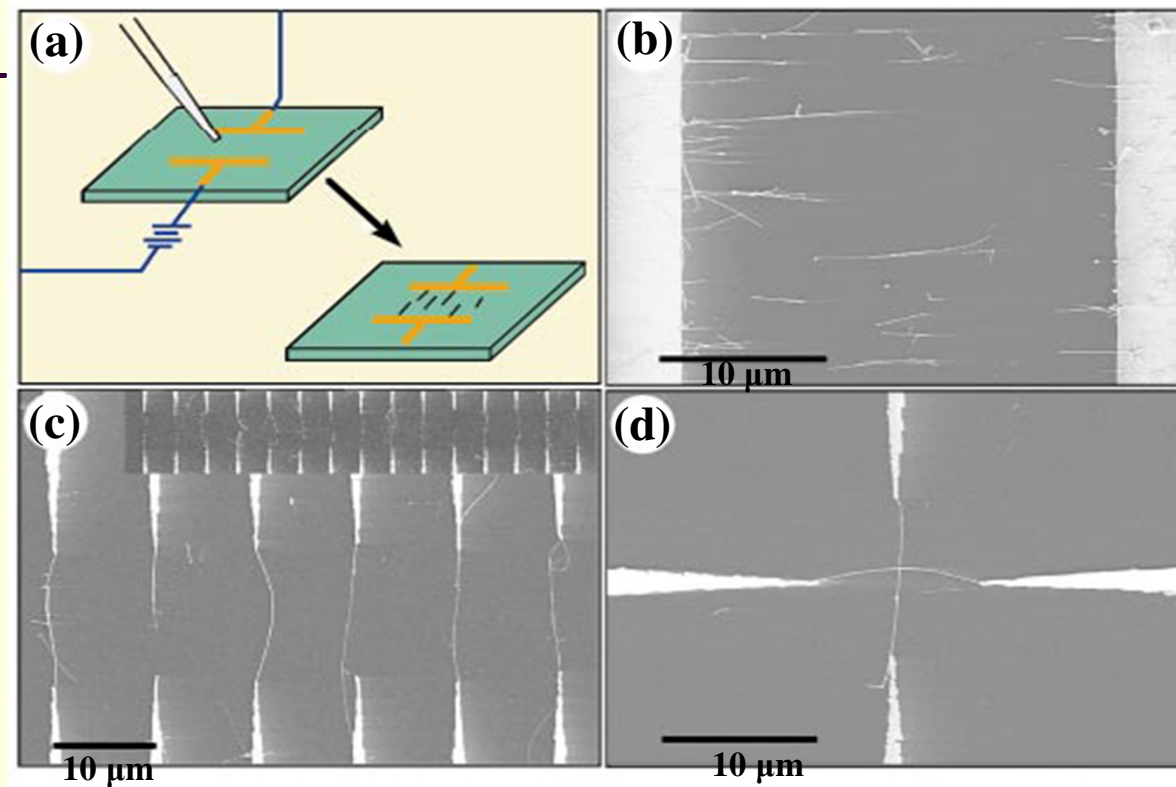


Igła elektrostacyjna: co wskazuje?



Parallel and orthogonal assembly of nanowires with electric fields

Duan et al., *Nature* **409** (2001) 66



(a) Schematic view of alignment by electric field. The electrodes (shown orange) are biased at 50 ± 100 V after a drop of nanowire solution is deposited on the substrate (blue). (b) Parallel array of nanowires aligned between two parallel electrodes. **The InP nanowires were suspended in chlorobenzene and aligned using an applied bias of 100 V.** (c) Spatially positioned parallel array of nanowires obtained following electric-field assembly using a bias of 80 V. Inset, **15 pairs of parallel electrodes** with individual nanowires bridging each diametrically opposed electrode pair. (d) Crossed nanowire junction obtained using layer-by-layer alignment with the electric field applied in orthogonal directions in the two assembly steps. The applied bias in both steps was 80 V. Scale bars in b-d, 10 μm.

Pole elektryczne

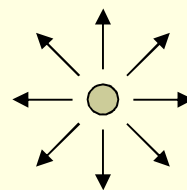
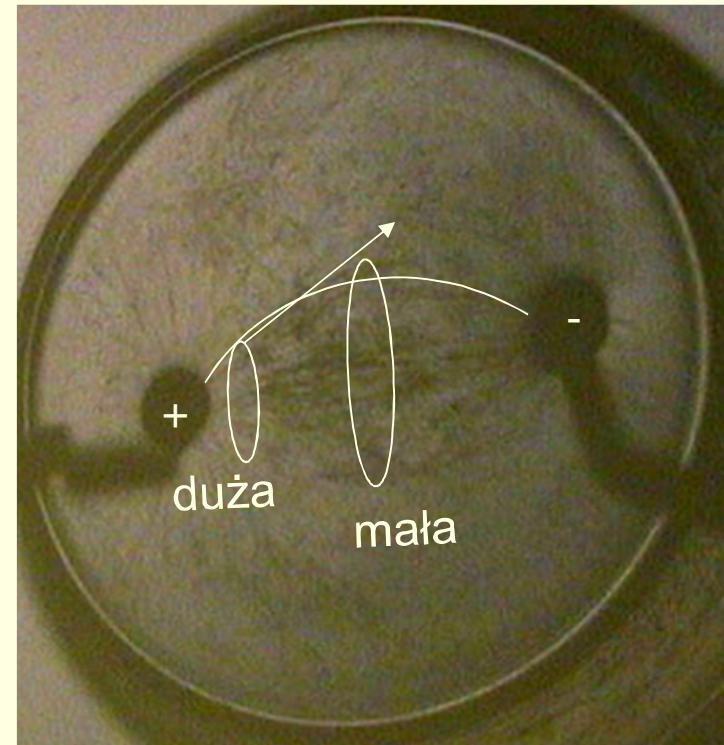


Obraz linii pola

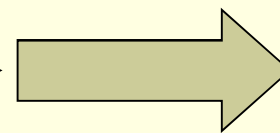
- Kierunek: zgodny z kierunkiem wektora natężenia pola
- Gęstość: proporcjonalna do wartości natężenia pola
- Mówi się: linie pola zaczynają się i kończą na ładunkach

Co to znaczy?

- Rola języka (także obrazowego)



Wykład drugi

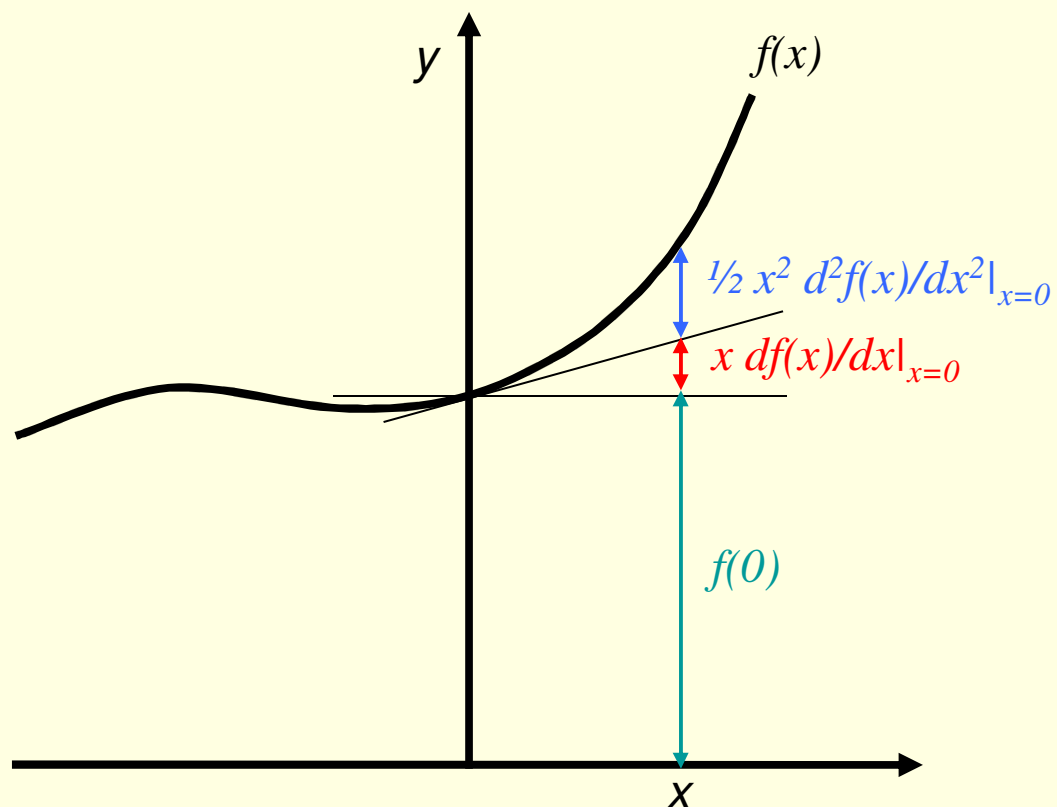


Prawo Coulomba!

Ładunki równych znaków odpychają się



Rozwijanie funkcji wokół zera



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=0}$$

Od jednego do trzech wymiarów

$$f(x) = f(0) + x \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} + \frac{1}{2} x^2 \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=0} + \dots$$

$$f(\mathbf{r}) = f(0) + \sum_{i=1}^3 r_i \left. \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_i} \right|_{\mathbf{r}=0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 r_i r_j \left. \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{\mathbf{r}=0} + \dots$$

Operator nabra

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

na przykład

∇f – gradient

Gradient funkcji skalarnej na mapie



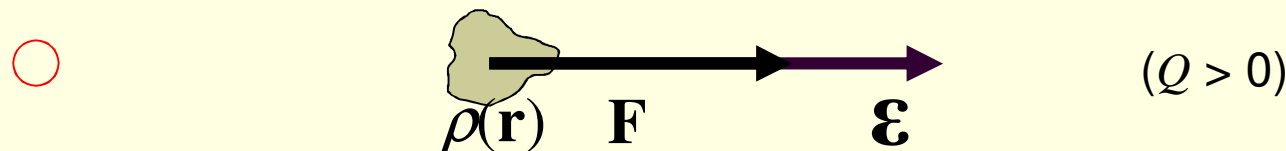
Poziomica

Gradient wysokości (energii potencjalnej): ku większym wartościom
Prostopadły do poziomicy

Siła na równi pochyłej $F = -\nabla E_p$

Wykład drugi

Pole elektryczne w działaniu na ciągły rozkład ładunku



$$\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d_3r$$

Rozwinięcie wokół zera

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(0) + \sum_i r_i \left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r_i} \right|_{\mathbf{r}=0} + \frac{1}{2} \sum_{ij} r_i r_j \left. \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{\mathbf{r}=0} + \dots$$

Operator nabra

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ na przykład}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r_i} = \nabla_i \mathbf{E}$$

$$\sum_i r_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r_i} = \sum_i r_i \nabla_i \mathbf{E} = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad \text{„iloczyn skalarny”}$$

ze względu na operator nabra

Pole elektryczne w działaniu na ciągły rozkład ładunku



$$\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d_3r \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{E} + \dots$$

$$\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{r}) d_3r \mathbf{E}(0) + \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d_3r \cdot \nabla \mathbf{E} \Big|_{\mathbf{r}=0} + \dots = Q \mathbf{E}(0) + \mathbf{p}_e \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} + \dots$$

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) d_3r$$

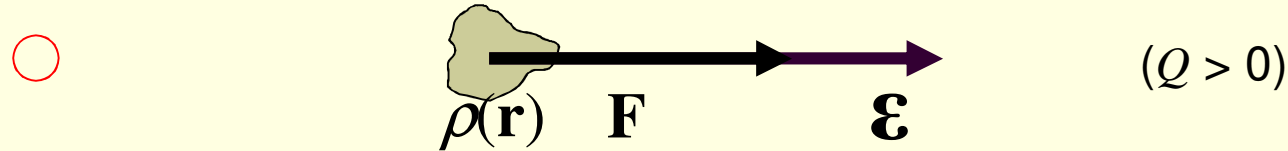
Ładunek
(siła $\propto$ natężenia pola)

$$\mathbf{p}_e = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d_3r$$

Elektryczny moment dipolowy
(siła $\propto$ gradientu natężenia pola)

Gdy $Q = 0$, siła działa tylko w polu niejednorodnym!

Względem jakiego punktu?



Można też definiować moment dipolowy względem wybranego punktu

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) d_3r$$

Ładunek

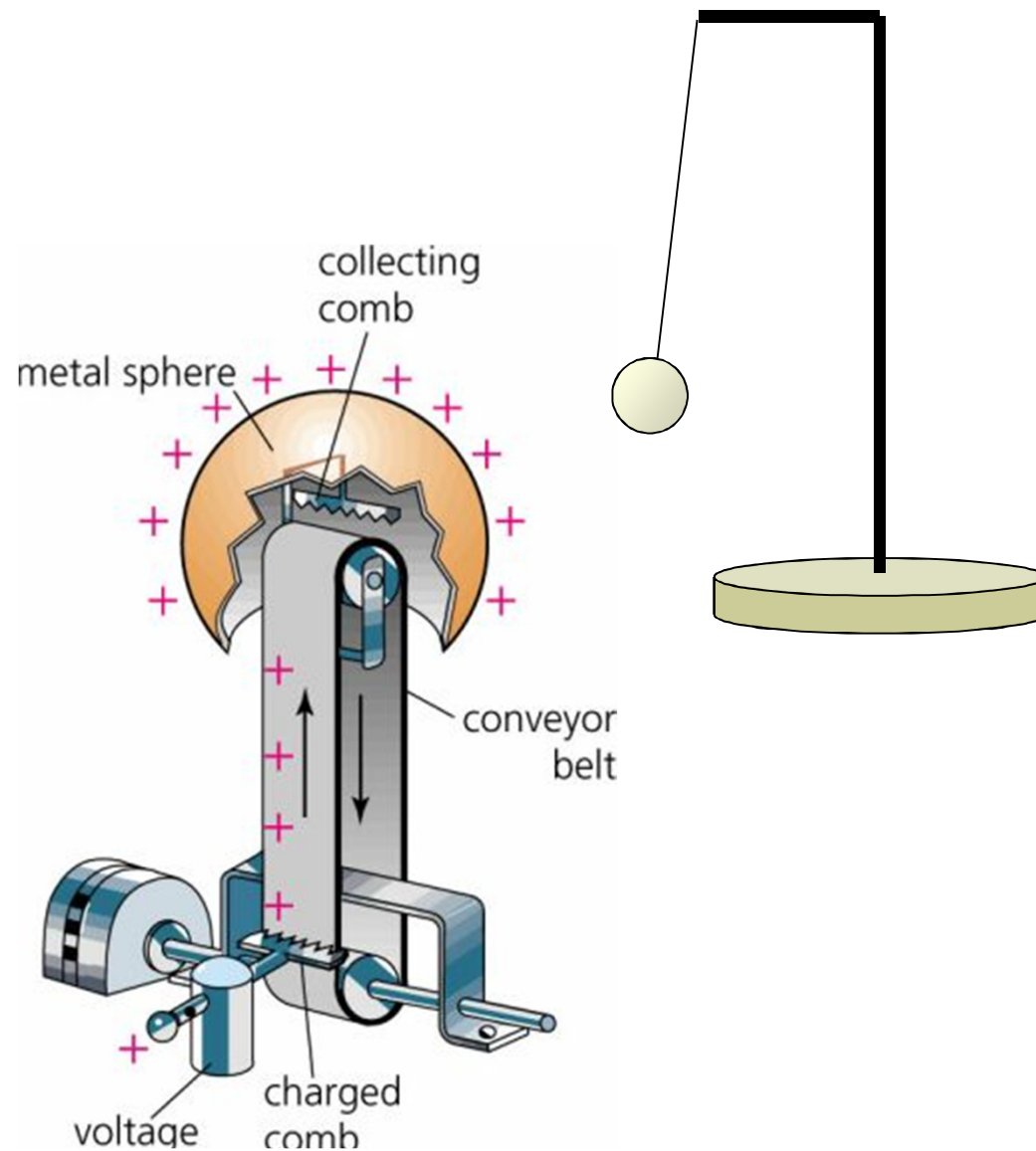
$$\mathbf{p}_e = \int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}) d_3r$$

Elektryczny moment dipolowy

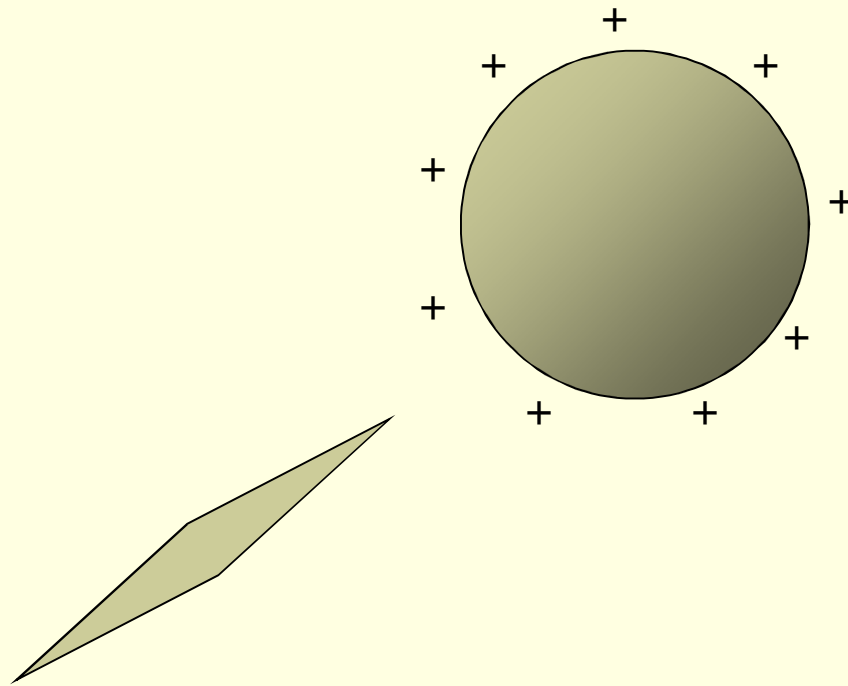
$$\int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}) d_3r = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d_3r - Q\mathbf{r}_0$$

Gdy całkowity ładunek znika, moment dipolowy nie zależy od wyboru $\mathbf{r}_0$

Nienaładowwana kulka w polu



Przewodząca igła elektrostacyjna



Środek ładunku



Środek ładunku definiujemy tak, jak środek masy

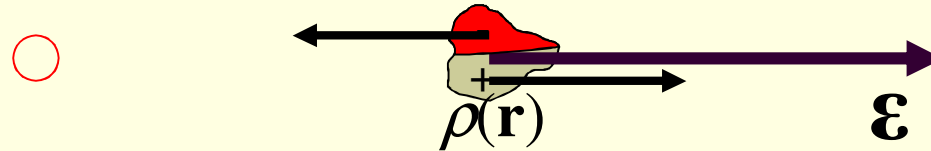
$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{Q} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d_3 r; \quad Q \neq 0$$

Liczony względem $\mathbf{r}_0$ elektryczny moment dipolowy znika

$$\mathbf{p}_e = \int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}) d_3 r = \mathbf{r}_0 Q - \mathbf{r}_0 Q = 0$$

Gdy ładunek całkowity znika: $Q = \int \rho(\mathbf{r}) d_3 r = 0$
moment dipolowy nie zależy od punktu, względem którego go liczymy

Moment siły



$$\mathbf{N} = \int \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d_3r$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{E} + \dots$$

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(0) d_3r + \dots = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(0) d_3r + \dots = \mathbf{p}_e \times \mathbf{E}(0) + \dots$$

Moment siły działa na dipol także w polu jednorodnym!

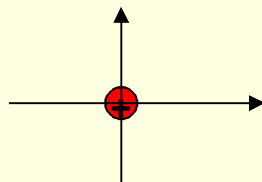
Efekty multipolowe różnych rzędów (2^k -polowe)

- Zerowy: Monopolowy (ładunek)
- Pierwszy: Dipolowy
- Drugi: Kwadrupolowy
- Trzeci: Oktupolowy
- Czwarty: Heksadekapolowy
- etc...

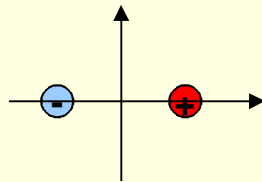
Siła $\propto$ k-tej pochodnej natężenia pola

Moment siły $\propto$ k-1szej pochodnej natężenia pola ($k > 0$)

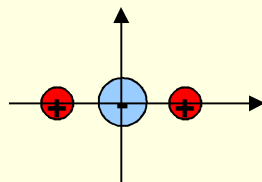
Proste przykłady rozwinięcia multipolowego



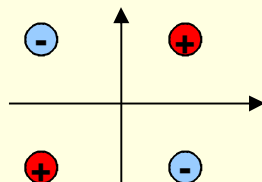
ładunek



momenty dipolowy, oktupolowy ...



momenty kwadrupolowy, heksadekapolowy ...



momenty kwadrupolowy ...

Dipol (kwadrupol, etc.)

- Rozkład ładunku, dla którego nie znika jedynie moment dipolowy (kwadrupolowy, etc.)
- Graniczna forma układu dwóch ładunków (dipoli, etc.) o przeciwnych znakach i odległości dążącej do zera przy stałym momencie dipolowym (kwadrupolowym, etc.)
- Rozkład ładunku opisany przez pochodną delty Diraca tego samego rzędu co multipol (0, 1, 2, itd... dla ładunku punktowego (monopola), dipola, kwadrupola, itd...)